Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 1

Jueves 4 de mayo de 2017 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

2217 – 7225

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Halle el término independiente de x en el desarrollo del binomio $\left(2x^2 + \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$.

2. [Puntuación máxima: 6]

La función f se define mediante $f(x) = 2x^3 + 5$, $-2 \le x \le 2$.

(a) Escriba el recorrido de f. [2]

(b) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$. [2]

(c) Escriba el dominio y el recorrido de f^{-1}. [2]

3. [Puntuación máxima: 5]

Los términos $1.^{\text{o}}$, $4.^{\text{o}}$ y $8.^{\text{o}}$ de una progresión aritmética cuya diferencia común es d, $d \neq 0$, son los tres primeros términos de una progresión geométrica cuya razón común es r. Sabiendo que el $1.^{\text{er}}$ término de ambas progresiones es 9, halle

(a) el valor de d; [4]

(b) el valor de r. [1]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. [Puntuación máxima: 7]

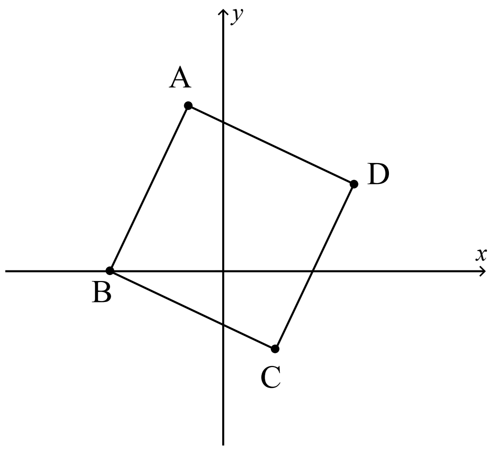
Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta. El desplazamiento, s metros, en el instante t segundos, viene dado por $s = t + \cos 2t$, $t \geq 0$. Sean t_1 y t_2 las dos primeras veces que la partícula está en reposo, donde $t_1 < t_2$.

(a) Halle t_1 y t_2. [5]

(b) Halle el desplazamiento de la partícula cuando $t = t_1$. [2]

5. [Puntuación máxima: 4]

En el siguiente diagrama de Argand, el punto A representa el número complejo $-1+4\mathrm{i}$ y el punto B representa el número complejo $-3+0\mathrm{i}$. La forma de ABCD es un cuadrado. Determine los números complejos que representan los puntos C y D.



. . . .

6. [Puntuación máxima: 7]

(a) Utilizando la sustitución $x = \tan\theta$, muestre que $\int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$. [4]

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de $\int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$. [3]

7. [Puntuación máxima: 7]

(a) La variable aleatoria X sigue la distribución de Poisson $\mathrm{Po}(m)$. Sabiendo que $\mathrm{P}(X > 0) = \frac{3}{4}$, halle el valor de m en la forma $\ln a$, donde a es un número entero. [3]

(b) La variable aleatoria Y sigue la distribución de Poisson $\mathrm{Po}(2m)$. Halle $\mathrm{P}(Y > 1)$ en la forma $\frac{b - \ln c}{c}$, donde b y c son números enteros. [4]

8. [Puntuación máxima: 9]

Demuestre mediante inducción matemática que $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$, donde $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$.

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 17]

Considere la función f definida mediante $f(x) = x^2 - a^2$, $x \in \mathbb{R}$, donde a es una constante positiva.

(a) Dibuje aproximadamente las siguientes curvas en sistemas de ejes separados, mostrando todos los cortes con los ejes x e y, los máximos, los mínimos y las asíntotas que haya.

(i) $y = f(x)$;

(ii) $y = \dfrac{1}{f(x)}$;

(iii) $y = \left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$. [8]

(b) Halle $\int f(x)\cos x \, \mathrm{d}x$. [5]

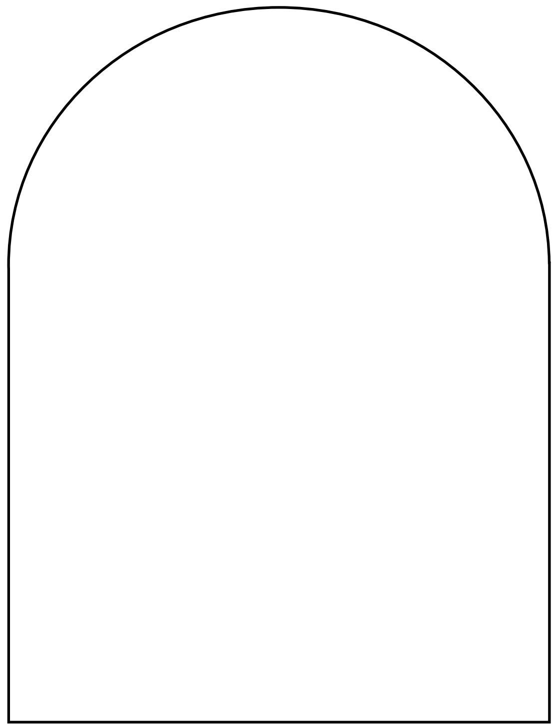
La función g se define mediante $g(x) = x\sqrt{f(x)}$, para $|x| > a$.

(c) Hallando $g'(x)$, explique por qué g es una función creciente. [4]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 11]

Una ventana se ha construido con forma de rectángulo con un semicírculo de radio r metros situado en la parte superior, como se muestra en la figura. El perímetro de la ventana es constante e igual a P metros.



(a) (i) Halle el área de la ventana en función de P y r.

(ii) Halle la anchura de la ventana en función de P cuando el área alcanza un valor máximo y justifique por qué se trata de un máximo. [9]

(b) Muestre que en este caso la altura del rectángulo es igual al radio del semicírculo. [2]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 22]

(a) Resuelva $2\ \text{sen}(x+60°)=\cos(x+30°)$, $0° \le x \le 180°$. [5]

(b) Muestre que $\text{sen}\ 105° + \cos\ 105° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. [3]

(c) Sea $z = 1 - \cos 2\theta - \text{i sen}\ 2\theta$, $z \in \mathbb{C}$, $0 \le \theta \le \pi$.

(i) Halle, en función de θ, el módulo y el argumento de z. Exprese cada respuesta en su forma más simple.

(ii) A partir de lo anterior, halle las raíces cúbicas de z en forma módulo-argumental. [14]